平成 17 年度　秋季合同研修会・授業者報告書（教材の背景 項目２.）

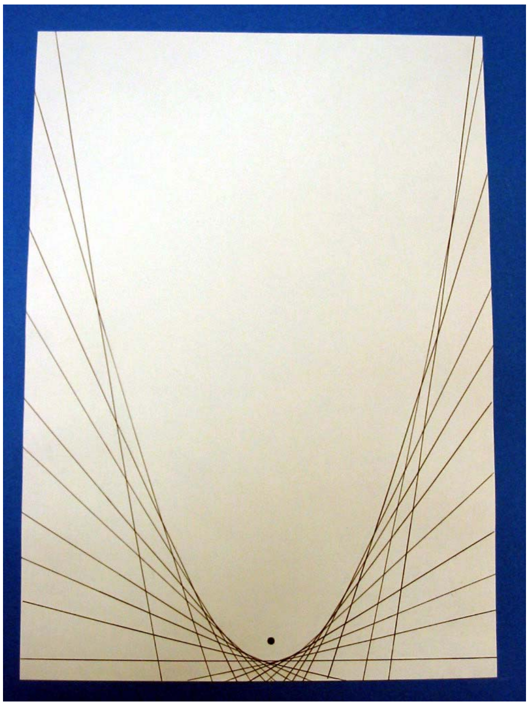
教科名（科目名）　数学（数学 A）　　　　　　　　授業者名　　小野田　啓子

数学科研修テーマ「IT 機器を効果的に活用した授業の研究」

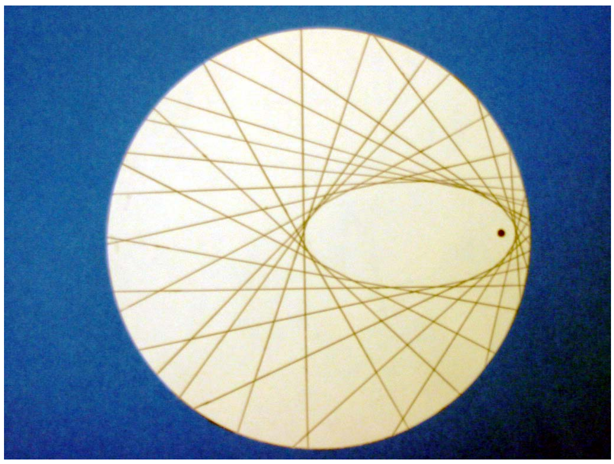
１．はじめに

数学を理解する上で, 如何に対象をイメージ化できるか, これが重要なポイントであると思う。学習していることを，まさに具体的に想像することができたり，視覚化して見ることができたりすることで広がる数学の世界は，その奥の深さにあらためて感動させられる魅力を持っている。

例えば，古代ギリシャ時代から知られ,「アポロニウスの円錐曲線」と呼ばれている，円・楕円・放物線・双曲線という２次曲線に関する様々な性質は，式で表すだけではなく，身近なものを使って描いたりする中でも，その不思議さと面白さに出会えるのである。四角い折り紙を使って放物線が描けることは，一度出会ったことがある方であれば印象に残り面白いと感じられた記憶があることと思う。（図１）さらに，円の折り紙を使って楕円を描くことができることも，生徒に描かせてみるとやや時間がかかって大変であるが, 描かれる楕円に驚きの声が出る。（図２）なぜ描けるのかという理由までは知りたがらない生徒でも, こうした誰にでも体験できることによって数学の世界に触れ, 面白いと思ってもらえたら, 数学教師としてこの上なく嬉しい瞬間である。



（図 1）

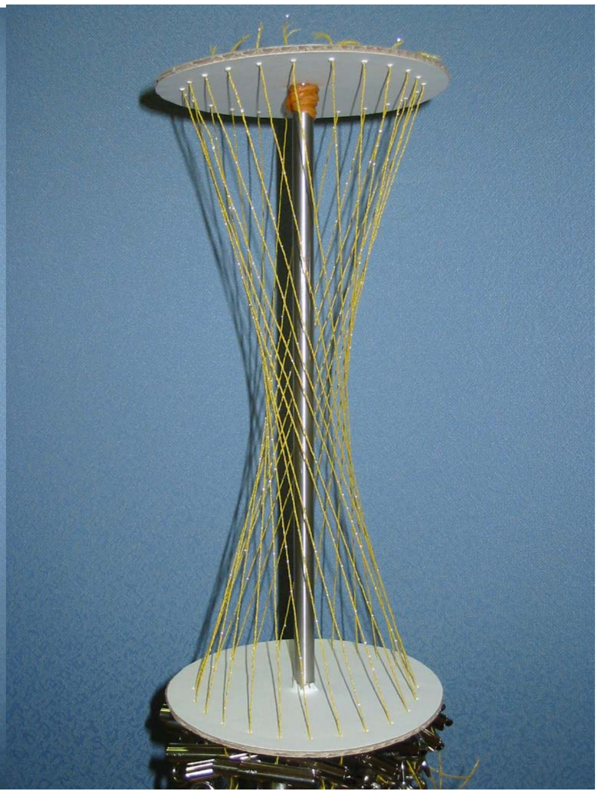


（図 2）

一方，曲面や立体のように 3 次元空間の図形を扱う場面というのもしばしば登場するが，2 次元の場合よりも，図に表しイメージ化することは一般に難しい。しかし，これらの図形の持つ面白い性質もまた，何とか視覚化して生徒に伝えたいと思うのである。例えば，神戸市の神戸ポートタワーの形は，線織曲面の一つである一葉双曲面という形をしている。横から見ると双曲線に見えるこの建物は，実は太いまっすぐな柱で造られている。その説明用に，（図３）のようなものを作ってみた。円盤を回転させてみると，（図４）のようになり，きれいな曲面ができる。しかし，曲面の上に載っているのは，１本１本すべて直線なのである。空間図形でもこのように模型を作

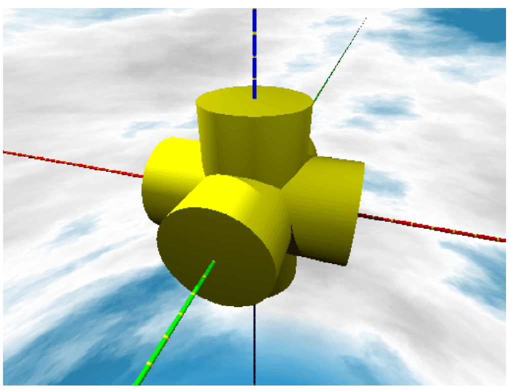
ってみたり実際に試してみることができれば，図形の特徴や美しさを実感してもらえるのではないだろうか。

（図 3）

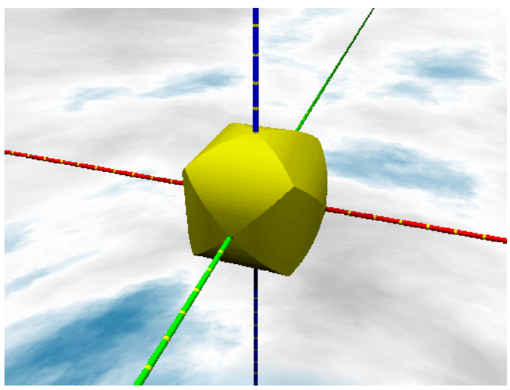


（図 4）

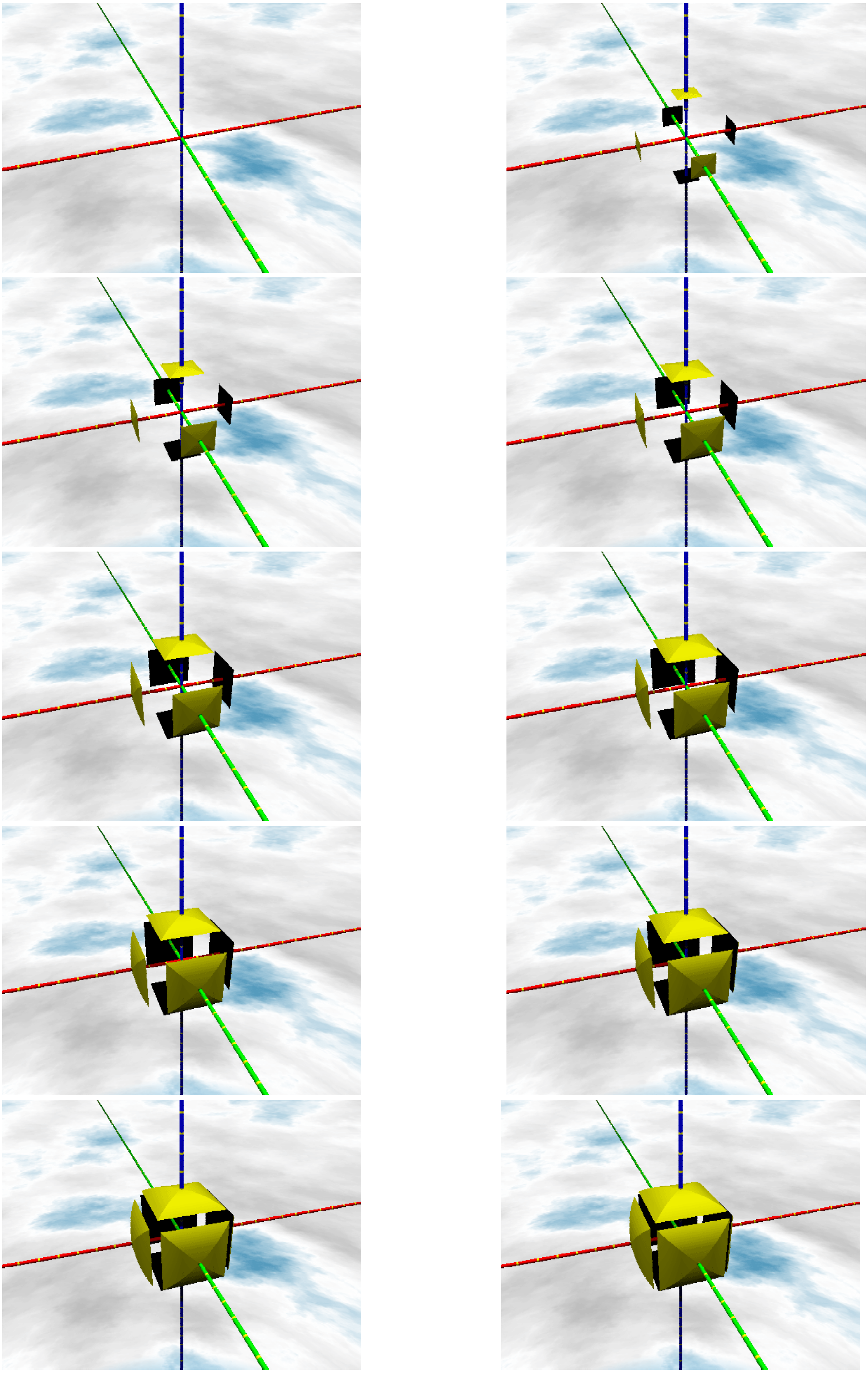
また，コンピュータを使って立体を表すことも，イメージを持たせる一つの方法である。例えば，３つの円柱が重なり合ったところにできる立体の形である。これは，大学入試問題にもしばしば登場する題材である。切断面を考え，その断面図を重ね合わせていって全体の形を考えるのが常套手段であるが，生徒にとってはイメージが湧きにくいのではないだろうか。そこで，３次元 CG ソフト「POV−Ray」（フリーソフト）を使って，その様子を説明する図を作ってみた。（図５）が，3 つの円柱が直交している様子である。（図 6）が，3 円柱の重なり合う部分の図形である。（図 7）は，３円柱の重なり合う部分を，正方形の形をした切断面を重ね合わせていくことで示してみた。



（図 5）



（図 6）



（図７）

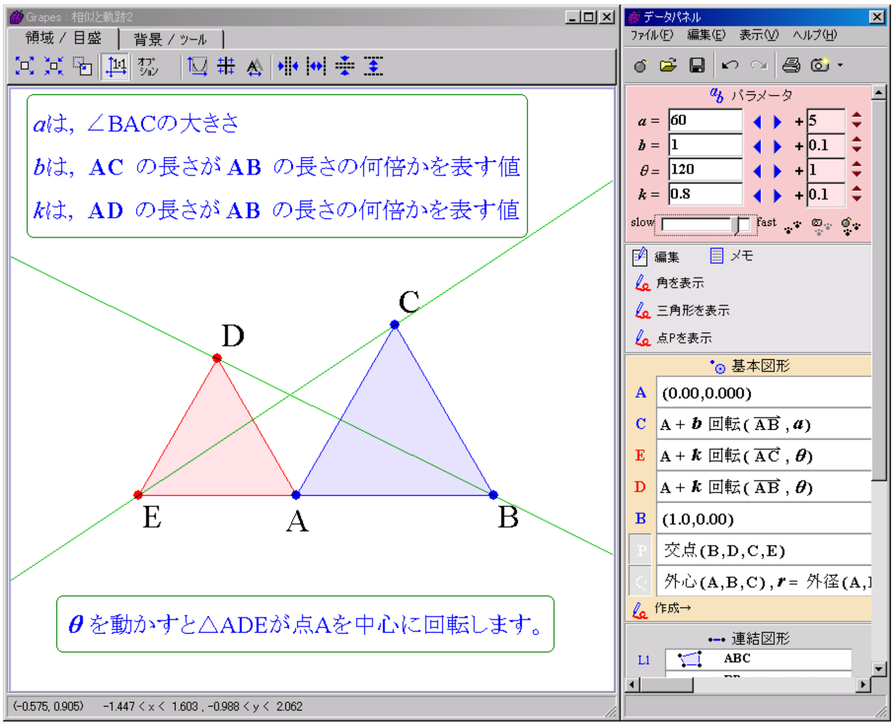
これらの画像は，さらに AV メーカーなどのソフトで読み込んで，アニメーションにすることができる。AV メーカーにも多くのフリーソフトがある。

以上のように，数学には，蓄積された多くの優れた教具・教材があり，最近はそこに IT 機器の発達によって，コンピュータが創造的な思考を助ける教具として威力を発揮するようになってきた。しかし，コンピュータを有効に授業の場面，あるいは数学の指導に生かす方法は，まだまだ蓄積が少なく研究をしなければいけない分野である。IT 機器は，生徒にとって分かりやすい授業や，発展的な考察を引き出し確かめ証明するといった，主体的な学習に，活用できる教具である。授業における分かりやすい説明，あるいは提示によって，生徒の数学への理解や興味・関心が深まり，学習の動機付けと学力の向上に繋がることをねらって，本校でもこれまで実践を行ってきた。今回は，今まで本校で実践してきた例をいくつか紹介して，討議を行うとともに，今後の授業に生かせる IT 機器のより良い活用方法について意見を交換することを目的として，本研究テーマを設定した。

２．相似と軌跡（本日の授業）について

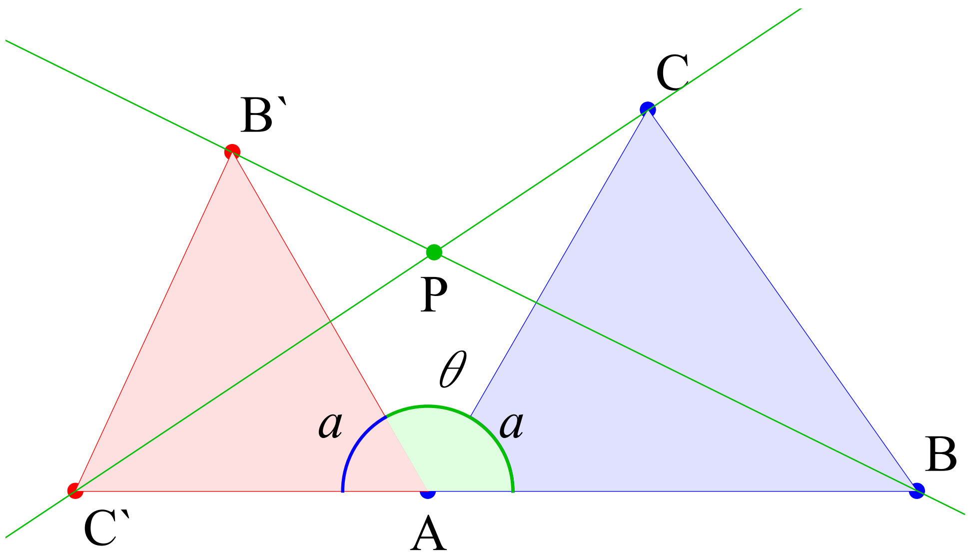
この教材は，指導案の単元の教材観でも述べたように，問題の設定の仕方が多様であり，対応する頂点を結んだ直線の交点 P の軌跡については，「２つの図形の相似比によって決まる中心角をもつ，円弧状を動く」という非常に簡潔な結論を持っている。交点 P は円弧を描くという定性的な動きだけを扱うのであるなら，むしろこれは中学生の教材である。しかし，点 P が円周上の一部($0<k<1$ のとき)しか動かないことに気づいたとき，どこまで動くのか気になり求めてみたいと思った。そこで，点 P がどこまで動くことになるのかということを扱うには，円に関するいろいろな性質と直角三角形の角と辺の比を既習事項として使える，高校１年生の数学 A の教材として扱う方が適していると考えた。

先ず，Grapes を使って，交点 P がどこまで動くのか見てみようと思った。Grapes には，点や交点を表示できる関数がある。名前も漢字でイメージしやすく，カーソルをその関数の上に持っていくと，その使い方が下欄に表示されるようになっているため大変便利である。交点を計算して，パラメータで表さないと表示できないのではないかと心配する必要はない。そうして使ったファイルが，(図８)である。問題の交点 P は，「交点」という関数を使って作図的に求められている。これで，パラメータ k，b，a を変えながら点 P の動く範囲を調べて見ると，点 P の動く範囲は，k によって決まるのではないかと思えてきた。そこで，点 P の軌跡を計算して確かめようと思った。その計算の過程を次に示す。



（図 8）

〔相似な三角形における対応する点を結んだ直線の交点 P の描く軌跡〕



$\triangle ABC \backsim \triangle AB'C'$
$\dfrac{AC}{AB} = r =$ 辺比 ， $\dfrac{AB'}{AB} = k =$ 相似比
$\angle BAC = \angle B'AC' = a$
$\triangle AB'C'$を，Aを中心に回転させたときの，直線ABから測った回転角をθ

$A(0\,,0)\,,B(1\,,0)\,,C(r\cos a\,,r\sin a)\,,B'(k\cos\theta\,,k\sin\theta)\,,C'(kr\cos(\theta+a)\,,kr\sin(\theta+a))$
とおくと，
点 BB ' を通る直線は，
$k\sin\theta\, x-(k\cos\theta-1)\, y = k\sin\theta$ ・・・・・①
点 CC ' を通る直線は，
$\{k\sin(\theta+a)-\sin a\}\, x-\{k\cos(\theta+a)-\cos a\}\, y = kr\sin\theta$ ・・・・・②

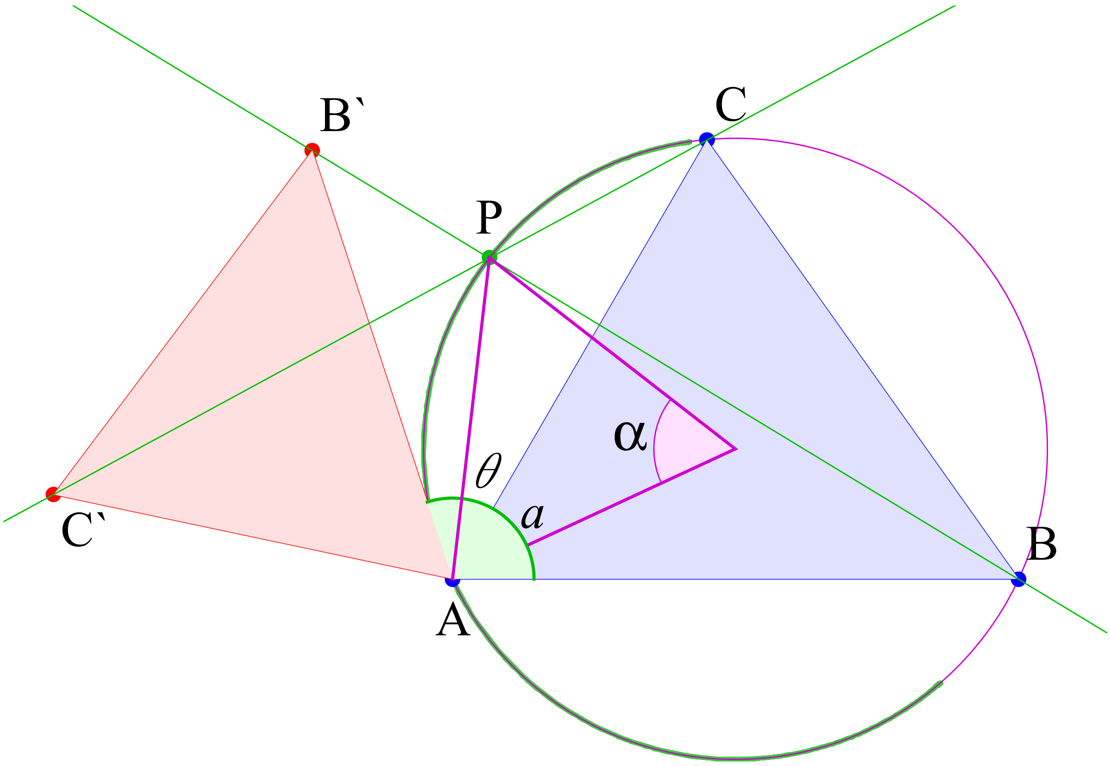
連立方程式の解は，
$a_1 x + b_1 y = c_1$
$a_2 x + b_2 y = c_2$ のとき， $x = \dfrac{c_1b_2-b_1c_2}{a_1b_2-b_1a_2}$ ，$y = \dfrac{a_1c_2-c_1a_2}{a_1b_2-b_1a_2}$ より，
①，②を連立させて交点 P の座標$(x\,,y)$を求めると，

$a_1b_2-b_1a_2 = \sin a(k^2+1-2k\cos\theta)$
$c_1b_2-b_1c_2 = k\sin\theta\{-k\cos(\theta+a)+\cos a+kr\cos\theta-r\}$
$a_1c_2-a_2c_1 = k\sin\theta\{kr\sin\theta-k\sin(\theta+a)+\sin a\}$
より，

$$x = \frac{k\sin\theta\{-k\cos(\theta+a)+\cos a+kr\cos\theta-r\}}{\sin a(k^2+1-2k\cos\theta)} \quad \cdots\cdots③$$

$$y=\frac{k\sin\theta\{kr\sin\theta-k\sin(\theta+a)+\sin a\}}{\sin a(k^2+1-2k\cos\theta)} \quad \cdots\cdots④$$

次に，下の図で，



⊿ＡＢＢ‘において，余弦定理から，

$BB'^2=k^2+1-2k\cos\theta$

⊿ＡＢＣの外接円の半径Ｒは，

$$\frac{BC}{\sin a}=2R$$

また，⊿ＡＢＣにおいて，余弦定理から，

$BC^2=1+r^2-2r\cos a$

よって，

$BC=\sqrt{1+r^2-2r\cos a}$ より，

$$R=\frac{\sqrt{1+r^2-2r\cos a}}{2\sin a}$$

一方，⊿ＡＢＣの外接円の中心をＯとおくと，∠POA＝αとして，余弦定理を用いて，

$$\begin{aligned}AP^2&=R^2+R^2-2R^2\cos\alpha\\&=2R^2(1-\cos\alpha)\\&=\frac{(1+r^2-2r\cos a)(1-\cos\alpha)}{2\sin^2 a}\end{aligned} \quad \cdots\cdots⑤$$

AP は，③，④より，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AP}^2 &= x^2 + y^2 \\
&= \frac{k^2\sin^2\theta[\{-k\cos(\theta+a)+\cos a+kr\cos\theta-r\}^2+\{kr\sin\theta-k\sin(\theta+a)+\sin a\}^2]}{\sin^2 a(k^2+1-2k\cos\theta)^2} \\
&= \frac{k^2\sin^2\theta\{(k^2+1)(r^2+1-2r\cos a)-2k\cos\theta(r^2+1-2r\cos a)\}}{\sin^2 a(k^2+1-2k\cos\theta)^2} \qquad \text{......〔付記1〕} \\
&= \frac{k^2\sin^2\theta(r^2+1-2r\cos a)(k^2+1-2k\cos\theta)}{\sin^2 a(k^2+1-2k\cos\theta)^2} \\
&= \frac{k^2\sin^2\theta(r^2+1-2r\cos a)}{\sin^2 a(k^2+1-2k\cos\theta)}
\end{aligned}
$$

(〔付記１〕参照)

よって，⑤から，

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= 1-\frac{2\sin^2 a\ \mathrm{AP}^2}{1+r^2-2r\cos a} \\
&= 1-\frac{2\sin^2 a\ k^2\sin^2\theta(r^2+1-2r\cos a)}{(1+r^2-2r\cos a)\sin^2 a(k^2+1-2k\cos\theta)} \\
&= 1-\frac{2k^2\sin^2\theta}{k^2+1-2k\cos\theta} \\
&= \frac{k^2+1-2k\cos\theta-2k^2\sin^2\theta}{k^2+1-2k\cos\theta} \\
&= \frac{k^2\cos 2\theta-2k\cos\theta+1}{k^2+1-2k\cos\theta} \qquad \cdots\cdots⑥
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\alpha = arc\cos\left(\frac{k^2\cos 2\theta-2k\cos\theta+1}{k^2+1-2k\cos\theta}\right) \qquad \cdots\cdots⑦
$$

と，k とθの関数として求められる。

　ここで，αの最大値を求めるために，⑥をθで微分すると，

$$
\cos\alpha' = \frac{(k^2\cos 2\theta-2k\cos\theta+1)'(k^2+1-2k\cos\theta)-(k^2\cos 2\theta-2k\cos\theta+1)(k^2+1-2k\cos\theta)'}{(k^2+1-2k\cos\theta)^2}
$$

……⑧

$$
\begin{aligned}
⑧\text{の分子} &= (-2k^2\sin 2\theta+2k\sin\theta)(k^2+1-2k\cos\theta)-2k\sin\theta(k^2\cos 2\theta-2k\cos\theta+1) \\
&= -4k^2(k^2+1)\sin\theta\cos\theta+8k^3\sin\theta\cos^2\theta+2k^3\sin\theta-2k^3(1-2\sin^2\theta)\sin\theta \\
&= 4k^2\sin\theta\{2k-k(1-\cos^2\theta)-(k^2+1)\cos\theta\} \\
&= 4k^2\sin\theta\{k\cos^2\theta-(k^2+1)\cos\theta+k\} \\
&= 4k^2\sin\theta(k\cos\theta-1)(\cos\theta-k)
\end{aligned}
$$

よって，⑧=0 となるのは，0<k<1 より，

$\sin\theta=0$ ， $\cos\theta=k$　のときである。

⑥は，$\cos\theta_0=k$ のとき極値をもつので，⑦に代入してαの極大値を求めると，

$$
\begin{aligned}
\alpha &= arc\cos\left(\frac{k^2(2k^2-1)-2k^2+1}{k^2+1-2k^2}\right) \\
&= arc\cos\left(\frac{2k^4-3k^2+1}{1-k^2}\right) \\
&= arc\cos\left(\frac{(2k^2-1)(k^2-1)}{1-k^2}\right)
\end{aligned}
$$

$=arc\cos(-(2k^2-1))$
$=arc\cos(-\cos 2\theta_0)$
$=\pi-arc\cos(\cos 2\theta_0)$
$=\pi-2\theta_0$

点 P が描く弧の半分の弧 AP の円周角∠ACP＝ α/2 であるから,

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}-\theta_0$$

よって,

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)$$
$$=\cos\theta_0$$
$$=k$$

よって,

$$\angle\mathrm{ACP}=\frac{\alpha}{2}=arc\sin(k)$$

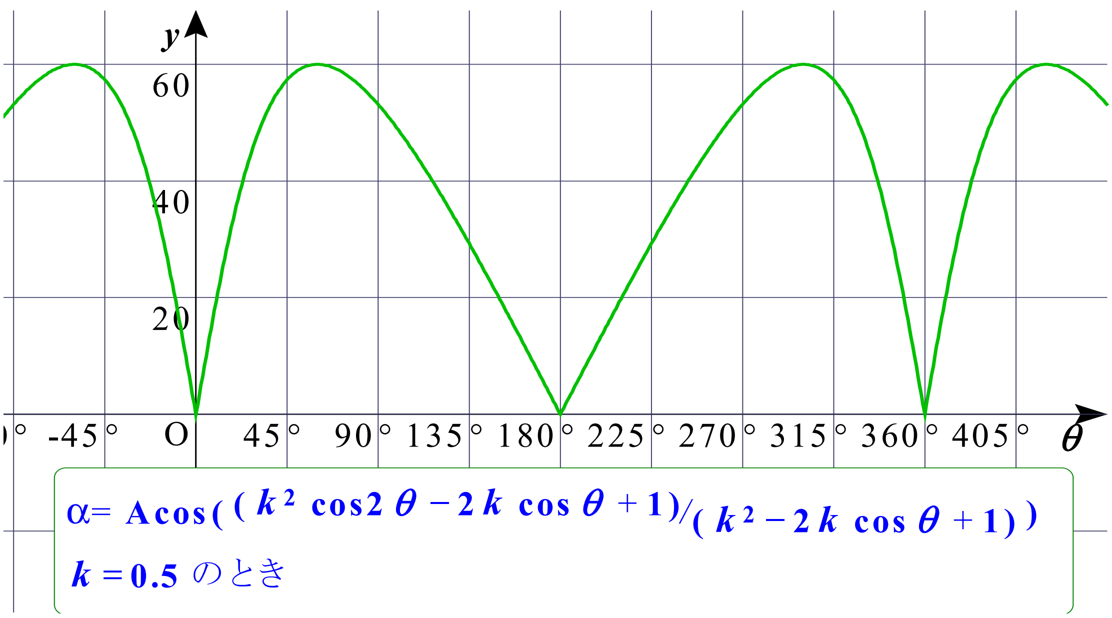
点 P が描く弧の中心角は 2α であるから,　$2\alpha = 4\times arc\sin(k)$　（証明終）

〔付記１〕 $(\mathrm{AP}^2$ の分子$)/k^2\sin^2\theta$ の計算の詳細

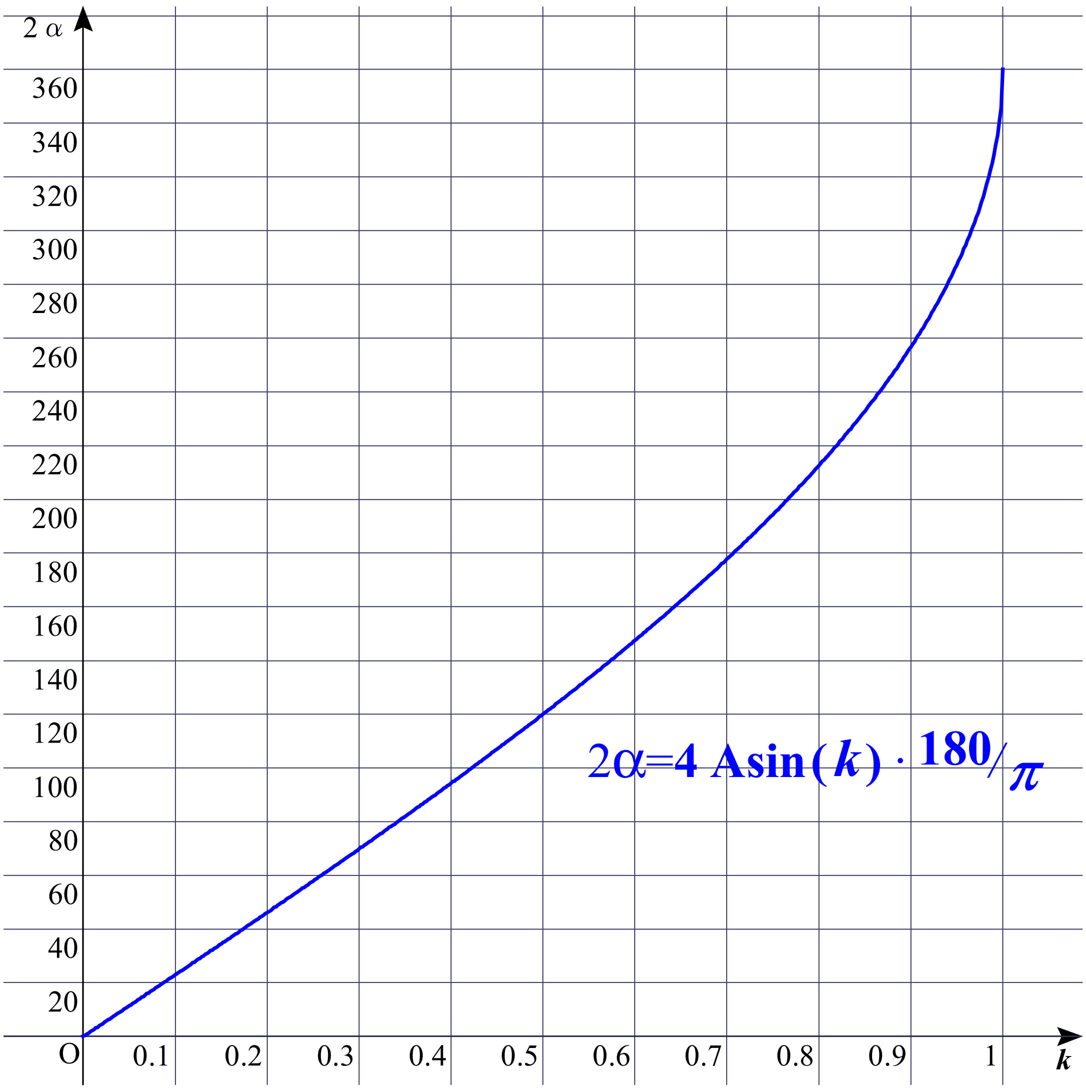
$\{-k\cos(\theta+a)+\cos a+kr\cos\theta-r\}^2+\{kr\sin\theta-k\sin(\theta+a)+\sin a\}^2$
$=k^2(r\cos\theta-\cos(\theta+a))^2+2k(r\cos\theta-\cos(\theta+a))(\cos a-r)+(\cos a-r)^2+$
$\{k^2(r\sin\theta-\sin(\theta+a))^2+2k\sin a(r\sin\theta-\sin(\theta+a))+\sin^2 a\}$
$=k^2\{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-2r\{\cos\theta\cos(\theta+a)+\sin\theta\sin(\theta+a)\}+\cos^2(\theta+a)+\sin^2(\theta+a)\}$
$+2k\{r\cos\theta\cos a-\cos(\theta+a)\cos a-r^2\cos\theta+r\cos(\theta+a)\}+\cos^2 a-2r\cos a+r^2$
$+2k\{r\sin\theta\sin a-\sin(\theta+a)\sin a\}+\sin^2 a$

$=k^2\{r^2-2r\cos a+1\}+2k\{r\cos(\theta-a)-\cos\theta-r^2\cos\theta+r\cos(\theta+a)\}+(r^2-2r\cos a+1)$
$=(k^2+1)(r^2-2r\cos a+1)+2k(2r\cos\theta\cos a-\cos\theta-r^2\cos\theta)$
$=(k^2+1)(r^2-2r\cos a+1)-2k\cos\theta(r^2-2r\cos a+1)$
$=(r^2-2r\cos a+1)(k^2-2k\cos\theta+1)$

〔付記２〕 k=0.5 のときの点 P がつくる∠POA＝ α の変化の様子



〔**付記３**〕0<k<1 のときの，点Ｐの描く円弧の中心角２αの値



実際には，計算で出すのはかなり大変であった。しかし，点Ｐの中心角が図形の回転角と相似比ｋの関数になることが分かり，あと２つのパラメータ b，a は関係しないという最初の予想が正しいことが分かった。

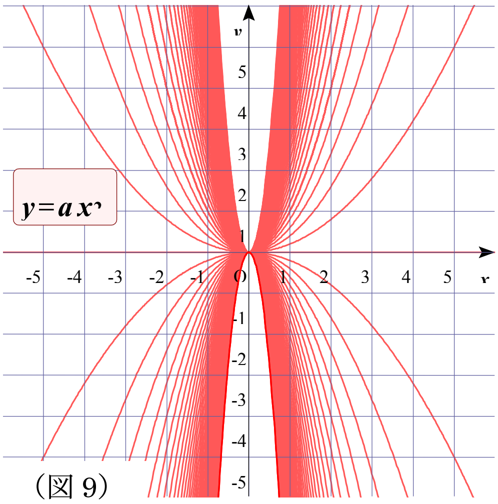
そこで，「点Ｐの動く範囲はｋの値だけで決まる」という一つの結論を使って，授業への教材化ができないかと考えた。この時，幾何的な性質を使った解法を教えていただき，生徒に具体的にｋ＝0.5 のときの中心角を，理由を考えて求めさせる授業の形ができたのである。内容については，先ず，正三角形について考え，その後 a，b を変えた場合を調べて，k の値が同じであれば，点Ｐの軌跡の中心角は等しく，k の値によって中心角が決まるという結論を見つけさせることにした。

この問題の教材化までの過程を振り返ると，今更であるが，非常に大きな教訓を得ることができる。それは，幾何の問題，特に合同や相似の関係を伴う問題では，比などを利用して必ず図形的に解く方法があるということである。今回，計算方法は単純であるから，解析的にやっても点Ｐ の軌跡が求められるのではと，気楽に計算し始めたものの結果は大変なことになった。これはこれで良い経験になったが，図形的に考えるというもう一方の見方にも，最初に気が回らなかったことが，恥ずかしながら大きな教訓となって，大変勉強となったのである。また，授業案を考える中では，生徒が Grapes を使って活動する時間が十分に取れることを念頭においた。限られ

た時間内で生徒の探求活動が深められるよう，問題の設定や解法について，教科内で何回か授業案の検討を行った。この過程も，大変有意義であった。

３．コンピュータを活用した授業実践

今までに，私が行ってきた実践記録は，（資料１）にあるように本校ホームページに掲載している。手法的には，最初プロジェクタなどの普通教室で提示できる環境がなかった頃は，コンピュータ教室での生徒操作による，発見学習または問題練習的な活用法の授業であったが，本校でプロジェクタを購入してからは，普通教室でのまとめのワンポイント的な活用や，授業の流れに合わせて黒板と交互に使って説明に使う方法が主である。

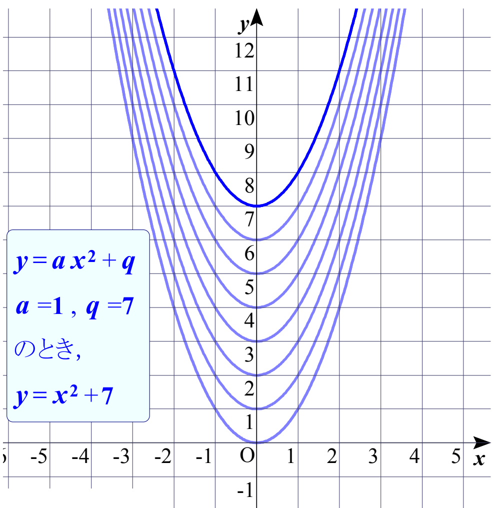


（図 9）

その中の一つ，今年度の１学期に４年生で行った授業での使い方をご紹介したいと思う。コンセプトは，「気軽に分かりやすく，生徒に合わせて使う。」である。単元は，２次関数の平行移動で，実施クラスは，特進コース習熟度応用クラスと，進学コース習熟度基礎クラスの２クラスである。

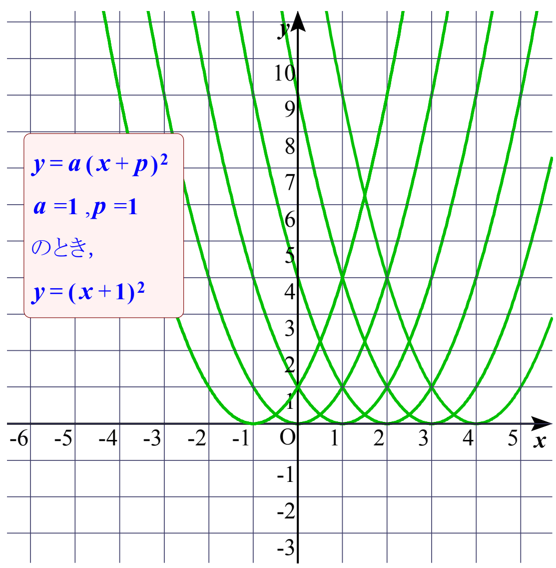
先ず，特進コースの生徒には，導入部分から Grapes を使って見せていった。お馴染みの，$y=ax^2$ の a を変えたときのグラフの変化の様子（図９）から入り，$y=ax^2+q$ では，パラメータ q を変えたときのグラフの変化の様子を Grapes で見せ，何故こう移動するのかを考えさせた。（図 10）次の $y=a(x-p)^2$ であるが，神奈川県立神奈川総合高等学校の石谷優行先生の提案〔文英堂シグマジャーナル No.29 参照。次の URL から PDF ファイルで読むことができる。

http://www.bun-eido.co.jp/textbook/sjournal/sjournal.html 〕を実践させていただき，$y=a(x+p)^2$ と式を入力して変化の様子を観察させた。この，＋p とするところがポイントである。このときは，初めに生徒にｐに数字をあてはめるとグラフはどう動くか予想させる。



（図 10）

前時の $y=ax^2+q$ でｙ方向への動きをやっているから，今度はなんとなくｘ方向と想像をする。「ｐに＋１を代入すると，ｘ 軸方向へ＋１移動する」と生徒は予想する。実際に代入してみると，予想に反して，ｘ 軸方向へ－１移動をする。（図 11）そして，なぜ逆方向に動くのか理由を考えた。この「予想」に反して，逆方向に動いたという印象が，（資料２）のアンケート結果からも，その後の頂点を読み取ったり，グラフの平行移動を考えるときに，式の中



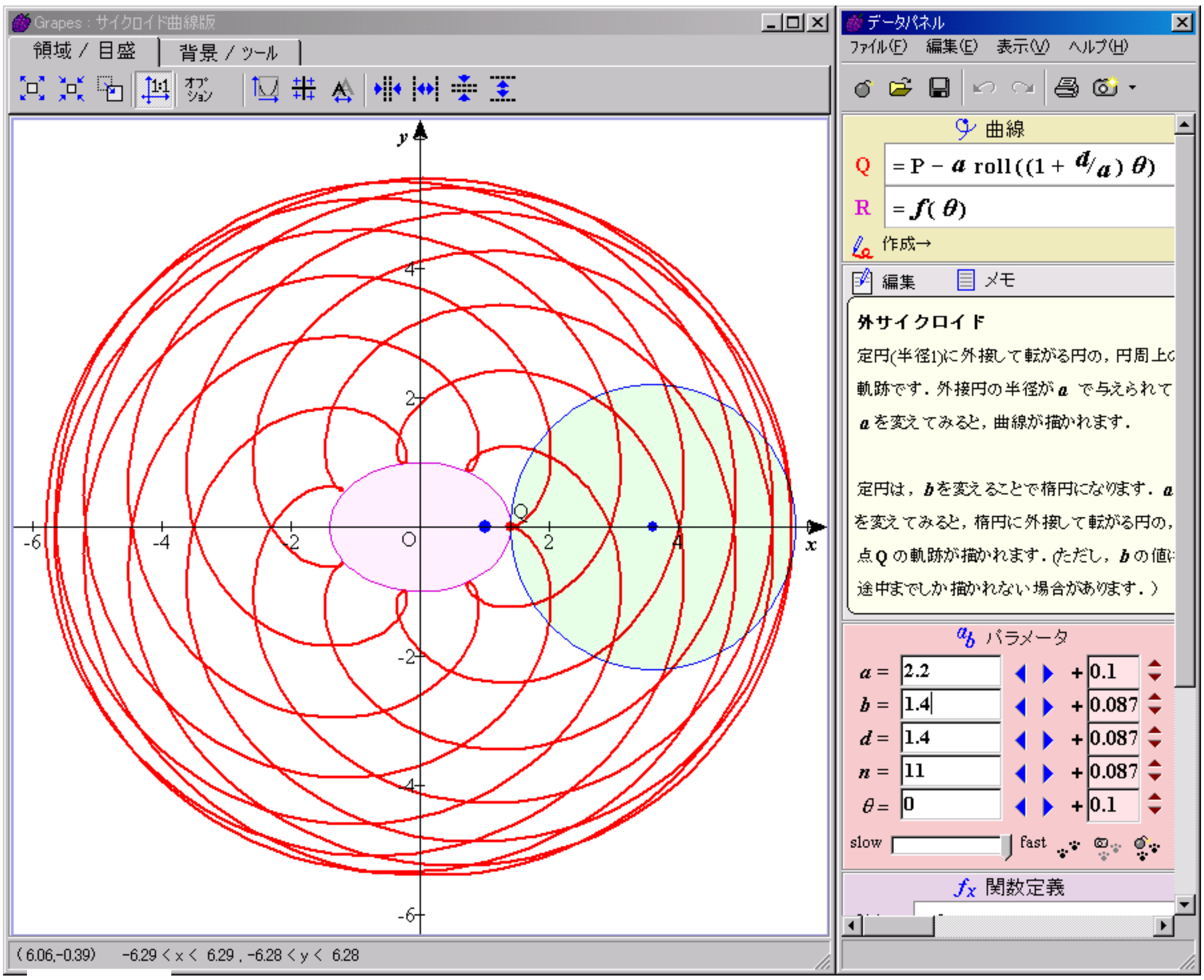
（図 11）

の符号と移動の向きをすんなり理解することに役立った様子がわかる。

次に，進学コースでは，最後のまとめとして平行移動の様子を復習するときに用いた。ひとつひとつを学習していたときには，生徒は一応理解できたといい，グラフを描くことにも取り組んでいたが，まとめの小テストをやると，グラフを描くどころか頂点を答えることもできない。もう一度復習するために，$y=ax^2$ のグラフ，$y=ax^2+q$ のグラフ，$y=a(x+p)^2$ のグラフ，$y=a(x+p)^2+q$ のグラフと 4 つをまとめて Grapes で描いて，問題練習を行った。そのときの感想は，アンケートには取っていないが，生徒からは「なんとかイメージが湧いて，前よりは分かった」という感想を聞けたことは嬉しいことであった。生徒にとって，グラフが動くという概念はこちらが想像する以上に難しいことなのである。イメージが湧くまでに時間がかかるとも言えるかもしれない。もちろん進学コースの生徒には，ようやくその状態になってから，さらに中間考査直前まで練習を重ねたことは言うまでもないことである。

4．Grapes を使った教材研究

授業で直接扱う範囲でなくても，問題を考えていたり，図形を見ていたりすると，これはどうなるのだろうという疑問が湧いてくることがある。そのような時，関数グラフに関することであればもちろん，図形の動きについてもかなりのところまで，Grapes を使って調べることができる。例えば，外サイクロイド曲線をいろいろと条件を変えて描いてみた。（図 12）

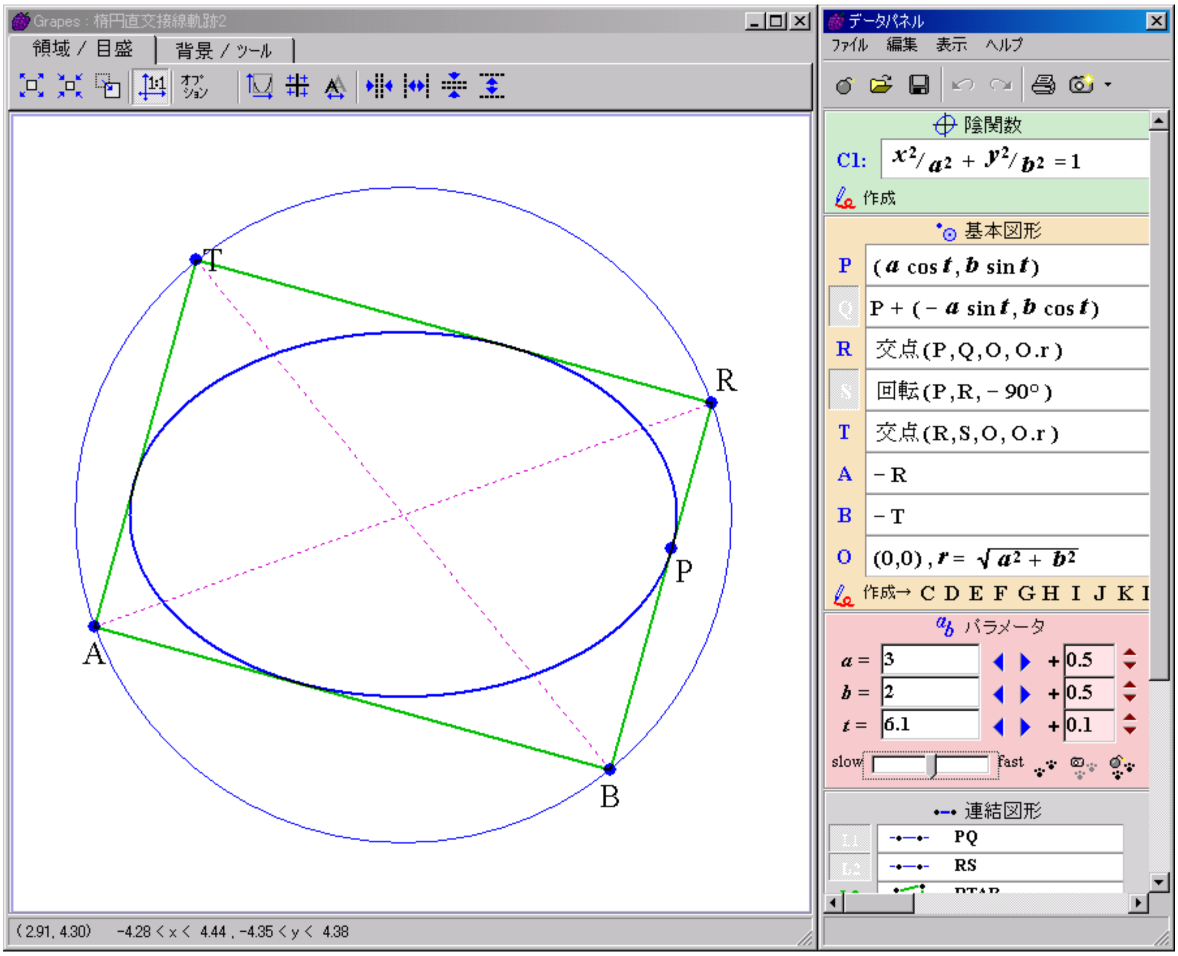


（図 12）

このファイルは，中を円にすることもできるが，パラメータを変えて楕円にすることができる。楕円の周りを，円が回転したとき，円周上の点が描く軌跡を見てみたいと思い作ってみたもので

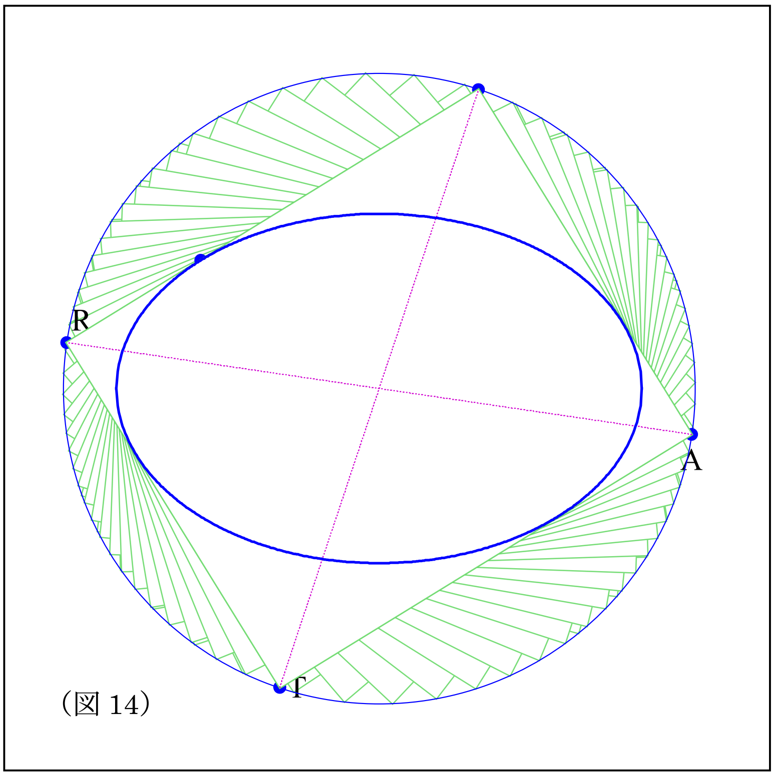
ある。中学生にこの外サイクロイドを描かせてみると，お遊びの感覚ではあるが，興味を持って何回も描く様子を見ていた。（図 12）のファイルは，出来上がった曲線を一気に表示するが，生徒には，スクリプトというプログラムを使って，自動的に曲線を描いていく途中の様子を見ることができるようにしたファイルも見せてみた。反応は，面白がって，外の円が中の楕円の周りを何周すると点が元の位置に戻るのかを数えていた。

次に，楕円や双曲線のもつ直交性の性質は，有名問題としてよく入試にも登場する。これらを解くと，非常にきれいな結果に感心させられるが，楕円の場合はイメージが湧くとしても，双曲線の場合には，想像するのがやや難しい。生徒であれば，なおイメージが湧かないのではないかと思い，次のようなファイルを作ってみた。問題は，「楕円（双曲線）の外部の点から引いた 2 本の接線が直交するような，点の軌跡を求めよ。」である。答えは，それぞれ楕円（双曲線）の準円となる。（図 13）は，楕円の場合の準円上の点から引いた 2 本の接線によって楕円を囲む長方形ができる様子を描いている。このとき，長方形 ABRT は，4 点を線で結んだ連結図形を使って描いているが，この残像ボタンを on にして描いたものが，（図 14）である。点 A，B，R，T の軌跡が円になる様子と残像の図形的な美しさを見ることができる。（図 15）は，双曲線の場合に点が準円上を動く様子をみるためのファイルである。双曲線上の接点 P を媒介変数表示しているので， t の値によって点と接線がどう動いていくかを調べることができる。



（図 13）

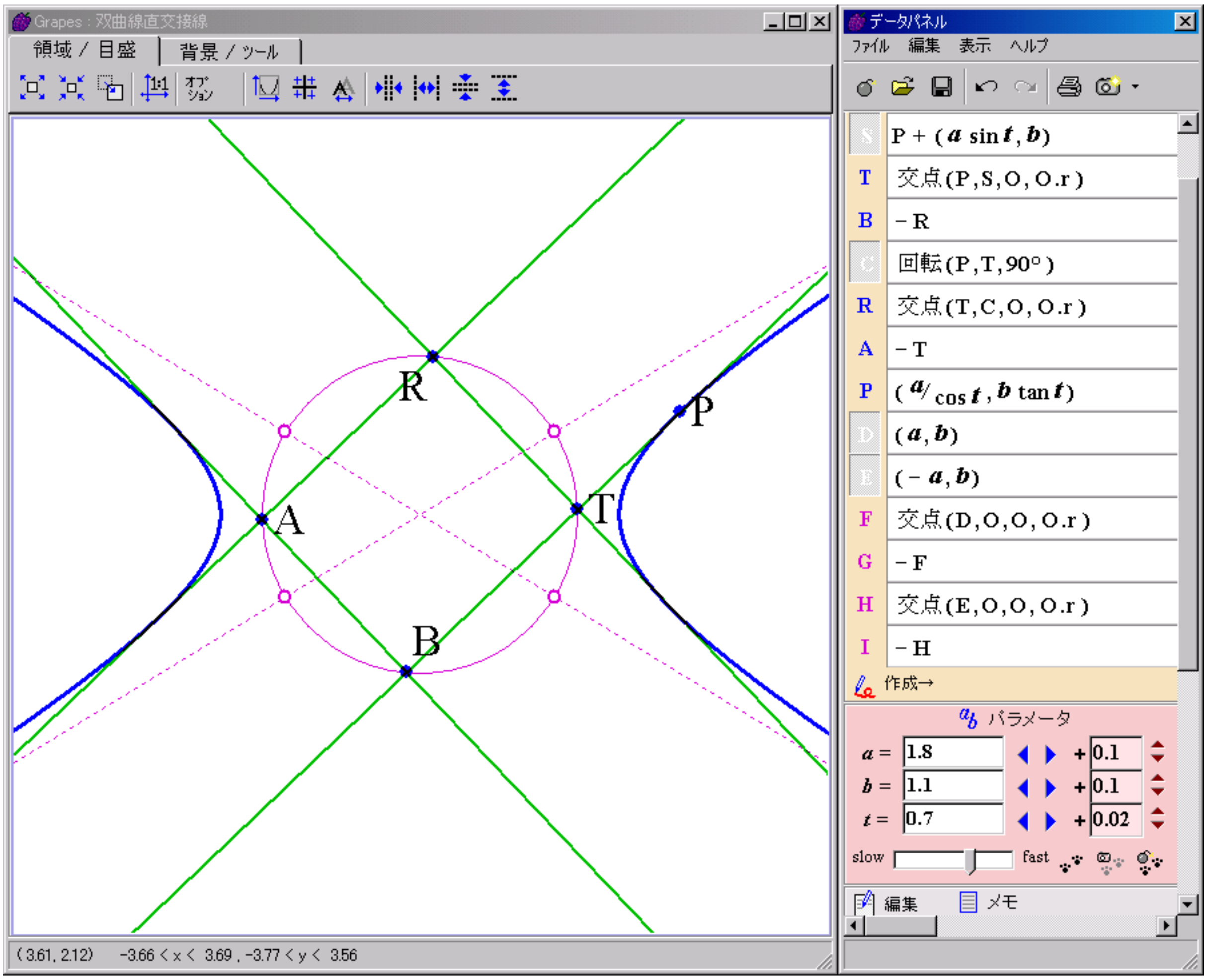
以上のような例は，授業ですぐ使えるものかというと，本校の場合必ずしもそうとはいえない。しかし，Grapes のような関数描画ソフトや，他の作図ツール，数学ソフトは我々教師の探求の幅を大きく広げてくれる。探求することで出会った感動が，生徒に数学の世界のおもしろさを伝えたいという原動力になるのではないかと思うのである。また，教師が夢中になっていることを，



（図 14）

生徒に触れさせてみると，その生徒から思いもよらない発想や感想が聞けることもある。大変勉強にもなる上に，授業では知らなかったその生徒の力や意欲を感じることができる。生徒が興味を持って，喜んでくれるということは，やはり何より嬉しいことである。

まだまだ，見方考え方を変えて接してみると，数学の面白さを感じることができるものが周りには限りなくあることと思う。数学に心を揺さぶられる体験，そんなものが，生徒が勉強に取り組もうとする気持ちや，物事に前向きに取り組もうとする力の源になるのではないだろうか。日常限られた時間ではあるが，少しずつでも探求する中から生徒に伝えられるものを見つけていきたいと思うのである。



（図 15）

５．おわりに

2005 年度は，2000 年度から 6 年計画で開始された「ミレニアム・プロジェクト『教育の情報化』」の最終年度である。これまでの間，各教室においてコンピュータやインターネットを活用できるよう，整備が進められてきた。

しかし, 教育の情報化への対応は, 例えば使いやすいソフトウェアの開発の遅れなどによって, 新しい IT 機器を十分に生かすことができない状況であるなど, まだ円滑に進行していない面がある。また，そうした技術的なことだけではなく，教員側の IT 機器の活用方法の研究も，まだ始まったばかりである。

中学校では，来年度の教科書の改訂に合わせて，今まで小学校用に開発され，現場で高い評価を得たデジタル教材エディタ『dbook』が公開され，デジタル教科書という動きが始まった。また，普通教室に普及しつつあるプロジェクタ等の大型提示装置を使ってシミュレーション教材を提示し，観察・実験を行いながら学習を展開する『マス･オン･プロジェクタ』等の教材も作られている。

今後，こうした教材や IT 機器の活用については，ある程度試行錯誤は避けられないであろう。しかし，これらを活用することで，多くの生徒が今までにない『感動』と，より良い『刺激』に出会ってもらえることを期待したい。

〔 謝　　辞 〕

本研究授業の題材となった交点 P の軌跡の考察に関して，元になる Grapes ファイルを送っていただき，また，幾何的な解法を示して，本文中の計算結果を確認してくださるなど，数々の非常に有益な助言をしてくださった大阪教育大学附属高等学校池田校舎の友田勝久先生に，この場をお借りして深く感謝を申し上げます。また，授業案について細かく検討を行ってくださった本校数学科の先生方にも，心から感謝を申し上げます。

（資料 1）

数学的コミュニケーションを深める授業の実践報告

起：平成13年度

最終更新日：平成13年10月10日(水)

〔中学〕

科　目	学年・組	単元・内容	研究主題・指導案	ワークシート	授業風景	生徒感想
数学	第1学年A組	文字と式・課題学習	ここをクリック	ここをクリック	ここをクリック	ここをクリック

コンピュータを活用した数学の授業実践報告

起：平成13年度　最終更新日：平成17年7月26日(火)　更新情報

〔高校〕

科目	単　元	内　容	使用ソフト	形態	指導案	ワークシート	生徒感想
数学Ⅰ	2次関数のグラフとx軸との共有点の個数	2次関数のグラフとx軸との共有点の個数の関係	Grapes	生徒操作	手引き	ここをクリック	ここをクリック
数学Ⅰ	2次関数とそのグラフ(1) *New*	$y=ax^2$のグラフと$y=ax^2+q$のグラフ	Grapes	教師提示	ここをクリック		
数学Ⅰ	2次関数とそのグラフ(2) *New*	$y=a(x+p)^2$のグラフ	Grapes	教師提示	ここをクリック		
数学Ⅰ	2次関数とそのグラフ(3) *New*	$y=a(x+p)^2+q$のグラフと平行移動	Grapes	教師提示	ここをクリック		
数学Ⅰ	2次関数とそのグラフ(4) *New*	$y=ax^2+bx+c$のグラフと平方完成	Grapes,ppt	教師提示	ここをクリック 授業用ppt	ここをクリック	ここをクリック (1)-(6)
数学Ⅰ	2次関数の最大最小(5) *New*	2次関数の最大・最小〔定義域に制限がある場合〕	Grapes	教師提示	ここをクリック	ここをクリック	
数学Ⅰ	2次関数の最大最小(6) *New*	2次関数の最大・最小〔定義域に文字定数を含む場合〕	Grapes	教師提示	ここをクリック	ここをクリック	ここをクリック (1)-(6)
数学Ⅰ	三角比　正弦定理	正弦定理の発見	Grapes	生徒操作	ここをクリック	ここをクリック1 ここをクリック2	ここをクリック
数学Ⅱ	円の方程式	円の方程式の導入	Grapes	生徒操作	(注1)	(注2) ここをクリック	ここをクリック
数学Ⅱ	円の方程式	円の方程式の一般形と円となる条件	Grapes	生徒操作	ここをクリック	ここをクリック	ここをクリック
数学Ⅱ	円と直線の方程式(発展学習)	2直線の交点を通る直線と，2つの円の共通弦の方程式	Grapes	生徒操作	ここをクリック	ここをクリック	ここをクリック
数学Ⅱ	円と直線の方程式(発展学習)	円と直線，2つの円の共有点を通る円の方程式	Grapes	生徒操作	ここをクリック	ここをクリック	ここをクリック
数学Ⅱ	軌跡	アポロニウスの円	Grapes	生徒操作	ここをクリック	ここをクリック	ここをクリック
数学Ⅱ	不等式の表す領域	直線と円で分けられる領域 連立不等式が表す領域	Grapes	生徒操作		ここをクリック1 ここをクリック2	ここをクリック
		直線で分けられる領域			ここをクリ	ここをクリ	ここをクリ

数学Ⅱ	不等式の表す領域【改訂版】 *New*	円で分けられる領域・連立不等式が表す領域	Grapes	生徒操作	ック1 ここをクリック2	ック1 ここをクリック2	ック1 ココをクリック2
数学Ⅱ	平均変化率と微分係数	平均変化率と微分係数	Grapes	生徒操作	ここをクリック	ここをクリック	ここをクリック
数学Ⅱ	微分法　関数の増減	3次関数のグラフ	Grapes	生徒操作	ここをクリック	ここをクリック	ここをクリック
数学Ⅱ	三角関数の応用 *New*	音と三角関数　～音で遊ぶ～	Grapes	教師提示	ここをクリック	ここをクリック	ここをクリック
数学Ⅱ	図形と式　*New*	通過領域	Grapes,ppt	教師提示	ここをクリック 授業用ppt	ここをクリック1 ここをクリック2	ここをクリック

〔中学〕
3年　2次関数　授業実践記録　(2002年9月実施)

科目	日時・時間	単元・内容	使用ソフト	指導案	ワークシート	形態
数学	9月5日(1時間目)	関数のグラフの復習(比例・反比例・1次関数)	Grapes	ここをクリック	ここをクリック (注3) 生徒記入例	生徒操作
数学	9月6日(2時間目)	xの2乗に比例する関数と$y=ax^2$のグラフ	Grapes	ここをクリック	ここをクリック1 ここをクリック2	教師提示
数学	9月7日(3時間目)	$y=ax^2$のグラフ($a>0$)	Grapes	ここをクリック	補助資料 ここをクリック	生徒操作
数学	9月10日(4時間目)	$y=ax^2$のグラフ($a>0,a<0$)	Grapes	ここをクリック	ここをクリック	生徒操作
数学	9月11日(5時間目)	$y=ax^2$のグラフのまとめ	Grapes	ここをクリック	ここをクリック	生徒操作・教師提示
数学	9月12日(6時間目)	$y=ax^2$のグラフ確認テスト		授業アンケート結果と分析	答案例1 答案例2	教室で確認テスト

(注1),(注2)指導案とワークシートは次のURLからダウンロードさせていただきました。
愛知県総合教育センター研究部教科研究室数学担当
http://www.apec.aichi-c.ed.jp/shoko/kyouka/math/itkatuyou/rei3/en_dou_jirei.html

(注3)作成したワークシートおよびGrapesファイルは，次のURLに掲載されている【資料】･第2回GRAPES講習会報告内の実践例「中学校におけるGRAPESの活用例－野々村礼二先生－」を参考にさせていただきました。
http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/index.html

〔使用ソフトの説明〕

Grapes (Graph Presentation & Experiment System)
大阪教育大学附属高等学校池田校舎　友田勝久先生が作られたグラフ描画ソフトです。簡単な操作で与えられた関数をグラフ化し，さまざまな角度から調べることができる大変優れたソフトで，フリーソフトウェアです。
最新版は，次のURLにあります。
http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/

〔コンピュータを活用した授業実践に関するリンク〕
ご好意により次のURLにリンクを張らせていただきました。

神奈川総合高校　石谷優行先生のホームページ
http://www.ishitani.com
の中に，「コンピュータを活用した効果的な授業の実践」が掲載されています。

〔上記ホームページの URL　http://www.seitoku.fujishiro.ibaraki.jp/info/math/index.htm
または,
http://www.seitoku.jp/ibaraki/course/index.html　の　ＰＣを活用した数学の授業実践報告　〕

（資料２）

授業アンケート〔Grapes の活用について〕　　　　　　2005.7.7

関数の学習で，数時間 Grapes という関数グラフ描画ソフトを使って授業を行いました。これについて今後の活用方法の参考とするために，アンケート調査を行いました。

回答者は，９名（１名欠席）です。

１．　　教科書 P68『２次関数（１時間目)』(6/7)，$y=ax^2$ の形・軸・頂点等の確認をした後，x^2 の係数 a の値を正から０，負に変化させてグラフの形の変化の様子を見ました。①

（1）①の画面の様子を覚えていますか?　　**ア　はい　８名　　イ　いいえ　１名**

（2）①のように，2 次関数の比例定数 a を変化させたときのグラフの様子を見て感じたことを，何でもよいので書いてください。

- **どのように変化するのかが分かりやすかった。正と負もはっきりする。**
- **動きがあったので分かりやすかった。**
- **規則的に動いていたので，とてもおもしろかった。**
- **きれいな線だなと思った。**
- **おもしろい♪**
- **黒板より速いし分かりやすいと思った。**
- **先生の説明を聞きながらグラフが動いていたので，授業のときは分かりやすかったけど，その後自分で考えたらよく分からなくなってしまって混乱してしまいました。**
- **その時は分かったけれど，今は分からない。**

２．　　教科書 P70，71 の『$y=a\,x^2+q$①，および $y=a\,(x+p)^2$②のグラフ』(6/7,6/8)について，

（1）①の q を+1，+2，…，-1，-2，…と，変化させたとき，グラフがどう変化するかは，

ア　印象に残った　９名　　　　　イ　あまり印象に残っていない　０名

（2）グラフが何故そのように変化するのかという理由は，

ア　理解できた　　　７名　　　　イ　よく理解できなかった　１名

ウ　どちらとも言えない　１名

（3）②の p を+1，+2，…，-1，-2，…と，変化させたとき，グラフがどう変化するかは，

ア　印象に残った　９名　　　　　イ　あまり印象に残っていない　０名

（4）グラフが何故そのように変化するのかという理由は，

ア　理解できた　　　８名　　　　イ　よく理解できなかった　１名

ウ　どちらとも言えない　０名

（5）①および②の式とグラフの関係を今回のように Grapes を使って調べた授業についての感想

や意見があったら書いてください。

- **いくつ増やす（減らす）と，どこに何個動くのかが分かりやすかった。**
- **グラフがどう動くのかが，いろいろな値をつけて見られたので分かりやすかった。**
- **１．でも思ったんですが，動きがある方が良いので是非活用させてください。**
- **黒板や教科書では分かりにくいことも，見て分かるのでおもしろいです。**
- **分かりやすかったと思う。**
- **もっと使って欲しかった。グラフの動きや形や場所が分かって理解しやすかった。**
- **その時は理解できなかった(質問(4))けど，勉強していたときにコンピュータを思い出して，「あ、やった！！」と思って，その問題が解けた。**
- **(2)で「どちらとも言えない」って答えたのですが，授業のときは理解できたけど段々分からなくなってきてしまったということです。**

３．　教科書 P80 の『2 次関数の最大値・最小値（定義域に制限がある場合)』(6/18)の学習について質問します。

（1）Grapes で定義域の範囲をいろいろな場合に変えながら，最大値・最小値を求めましたが，このときの PC の使用についてどう思いますか。

ア　分かりやすくてよい　８名　　　イ　特に分かりやすいとは思わない　１名
ウ　どちらとも言えない　０名

（2）定義域がある場合の最大値・最小値は，

ア　理解できている　６名　　　イ　よく理解できていない　１名
ウ　どちらとも言えない　２名

４．　教科書 P81 の『例題 26　定義域に文字定数を含む場合の最大値・最小値』(6/18)の学習について質問します。

（1）Grapes で定義域の範囲をいろいろな場合に変えながら，最大値・最小値を求めましたが，このときの PC の使用についてどう思いますか。

ア　分かりやすくてよい　７名　　　イ　特に分かりやすいとは思わない　１名
ウ　どちらとも言えない　１名

（2）このとき使用したプリントは，学習に役に立ちましたか？

ア　役に立った　８名　　　イ　あまり役に立たなかった　０名
ウ　どちらとも言えない　１名

（3）定義域に文字定数を含む場合の最大値・最小値は，

ア　理解できている　４名　　　イ　よく理解できていない　４名
ウ　どちらとも言えない　１名

＊以上で終わりです。